12JB

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

durée 4 heures

Problème

On désigne par E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où a et b sont donnés avec $a < b$, muni de la norme :

$$\|f\| = \sup|f| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

On désigne par E_1 le sous-espace de E_0 des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Pour tout $f \in E_0$ on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_a^b L(f)(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Pour tout entier non nul n on pose $L^n = L \circ L^{n-1}$ où $L^0 = \mathrm{id}$ (application identique).

On désigne par (P_n) la suite de polynômes définis par $P_0 = 1$ et $P_n = L^n(P_0)$ où l'on désigne par le même symbole le polynôme et la restriction de sa fonction polynômiale associée à $[a, b]$.

Partie I

1°. (a) Montrer que L est bien défini et constitue un endomorphisme de E_0.

(b) Déterminer son noyau $\mathrm{Ker}\, L$.

(c) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction à E_1 de cet endomorphisme L définit-elle un automorphisme de E_1 (justifier avec précision la réponse) ?

Tournez la page S.V.P.

2°. Soit $f \in E_0$.

(a) Démontrer l'égalité $L(f)(t) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x$ pour tout t dans $[a,b]$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels x_i et x_s dans $[a,b]$ tels que, pour tout t dans $[a,b]$:

$$L(f)(x_i) \leqslant L(f)(t) \leqslant L(f)(x_s).$$

(c) Calculer la borne supérieure α de $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,\mathrm{d}t$ lorsque x décrit $[a,b]$. En déduire que $\|L(f)\| \leqslant \dfrac{b-a}{2}\|f\|$. L'endomorphisme L est-il continu (justifier la réponse) ?

(d) Calculer $\|L(P_0)\|$ ainsi que $|||L||| = \sup \|L(f)\|$ lorsque f décrit la boule unité fermée de E_0 définie par $\|f\| \leqslant 1$.

Partie II

On désigne par F_1 le sous-ensemble de E_0 défini par les fonctions f telles que $f(a+b-t) = \varepsilon f(t)$ pour tout t dans $[a,b]$ avec $\varepsilon = -1$, et F_2 le sous-ensemble analogue avec $\varepsilon = +1$.

On désigne par f_1 l'application $t \mapsto \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^3$ et par f_2 l'application $t \mapsto (t-a)(t-b)$ où t décrit $[a,b]$.

1°. **(a)** Les ensembles F_1 et F_2 sont-ils vides ? réduits à $\{0\}$?

(b) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels. Les comparer avec leurs images par L.

2°. Soit f un élément de E_0 et g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(t) = \dfrac{1}{2}\left[f(t) + f(a+b-t)\right]$.

(a) Vérifier que g appartient à F_2.

(b) Démontrer la relation $E_0 = F_1 \oplus F_2$.

(c) Démontrer la relation $L^n(f)(a) = L^n(f)(b)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3°. Soit f un élément de F_2.

(a) Démontrer les relations :

$$L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \qquad L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0$$

$$\text{et} \qquad \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

lorsque n décrit N^*.

(b) On suppose désormais que $f(t) > 0$ pour tout t dans $[a, b]$. Étudier les variations de $L(f)$, $L^2(f)$, $L^3(f)$ et $L^4(f)$ puis, plus généralement, $L^n(f)$ lorsque n décrit N^*.

(c) Calculer le cardinal de $\Omega_n = \{t \in [a, b] \mid L^n(f)(t) = 0\}$ lorsque n décrit N^*.

(d) Déterminer le signe de $L^{2n}(f)(a)$ lorsque n décrit N^*.

Partie III

1°. **(a)** Exprimer P_1, P_2 et P_3 en fonction de la variable $t - a$.

(b) Établir l'égalité $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a)\dfrac{(X - a)^{n-1}}{(n-1)!}$ lorsque n décrit N^*.

(c) En déduire la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2°. Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$. On définit sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ l'application :

$$\varphi \ : \ (P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.

(b) Montrer que, si m et n sont deux entiers vérifiant les relations $m \geqslant n > 0$, l'on dispose des égalités :

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{n+m}(a) \qquad \text{et} \qquad \varphi(P_n, P_0) = 0.$$

(c) Montrer que $P_n(a) = 0$ si, et seulement si, n est impair et différent de 1.

3°. On désigne respectivement par FP_1 et FP_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}$ engendrés par les polynômes P_n d'indices pairs et impairs.

(a) Démontrer la relation $\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2$.

(b) Démontrer que cette somme directe est orthogonale pour le produit scalaire φ.

4°. On désigne par γ_n le nombre $\dfrac{n!}{(b-a)^n} P_n(a)$ (ainsi $\gamma_0 = 1$).

(a) Démontrer la relation $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \gamma_k$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et en déduire que γ_n est indépendant de a et de b.

(b) Calculer γ_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

(c) Déterminer une base φ-orthogonale du sous-espace G de FP_2 engendré par la famille (P_0, P_2, P_4, P_6).